

Übungsblatt 6

Elliptische Punkte und Spitzen auf Modulkurven

21. Elliptische Punkte von Kongruenzgruppen.

Es sei Γ eine Kongruenzgruppe von Γ_1 und $\tau \in \mathcal{H}$ ein elliptischer Punkt. Wir bezeichnen das Bild $\pi(\tau)$ auf der Modulkurve $X(\Gamma)$ unter der Projektion $\pi : \overline{\mathcal{H}} \rightarrow X(\Gamma)$ auch als elliptischen Punkt.

- (a) (2 Punkte) Es sei $\Gamma \subset \Gamma_1$ eine endliche Untergruppe. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: Für $\gamma \in \Gamma$ gilt: $|\operatorname{tr} \gamma| < 2$. γ besitzt nur endliche Ordnung, nämlich 3, 4, oder 6. Es gibt ein $\tau \in \mathcal{H}$ mit $\Gamma = \Gamma_\tau$.
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $X(\Gamma)$ endlich viele elliptische Punkte besitzt, und dass der Stabilisator Γ_τ endlich und zyklisch ist.
- (c) (1 Punkt) Es sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie mit Hilfe der Resultate aus Aufgabe 18 die Anzahl der elliptischen Punkte der Ordnung 2 und 3 für $\Gamma_0(p)$.

22. Verzweigungsindizes von Spitzen.

Sei Γ eine Kongruenzgruppe von Γ_1 der Stufe N und bezeichnen Sie mit Γ_κ den Stabilisator von $\kappa \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ in Γ . Sei $\kappa = \alpha^{-1} \cdot \infty$, $\alpha \in \Gamma_1$.

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\alpha \Gamma_\kappa \alpha^{-1} = (\alpha \Gamma \alpha^{-1})_\infty$.
- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es eine eindeutige ganze Zahl h gibt, genannt Verzweigungsindex von Γ bei κ , so dass
 - i. im Fall $-I \in \Gamma$, $\Gamma_\kappa = \pm \alpha^{-1} \{T^{hn}\}_{n \in \mathbb{Z}} \alpha$;
 - ii. im Fall $-I \notin \Gamma$, entweder $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1} \{T^{hn}\}_{n \in \mathbb{Z}} \alpha$,
oder $\Gamma_\kappa = \alpha^{-1} \{(-T^h)^n\}_{n \in \mathbb{Z}} \alpha$.

Zeigen Sie, dass h ein Teiler von N ist. Im Fall (i) ist der Verzweigungspunkt κ vom Typ I, im Fall (ii) vom Typ IIa bzw. IIb.

- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass h und der Typ (I, IIa oder IIb) von κ unabhängig von der Wahl von $\alpha \in \Gamma$ ist und dass sie nur von der Γ -Äquivalenzklasse abhängen.

- (d) (1 Punkt) Finden Sie die Verzweigungsindizes von Γ an allen Spitzen für $\Gamma = \Gamma_0(p)$, $\Gamma_0(p^2)$ und $\Gamma(2)$, wobei p eine Primzahl ist.

23. Abbildungsgrad zwischen Modulkurven.

Es seien Γ und Γ' Kongruenzgruppen von Γ_1 und $\alpha \in \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{Q})$, so dass $\alpha\Gamma\alpha^{-1} \subset \Gamma'$ (cf. Aufgabe 15).

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Zuordnung $\Gamma\tau \mapsto \Gamma'\alpha\tau$ eine holomorphe Abbildung $f : X(\Gamma) \rightarrow X(\Gamma')$ definiert.
- (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für den Grad dieser Abbildung gilt:

$$\deg f = [\{\pm 1\}\Gamma' : \{\pm 1\}\Gamma] = \begin{cases} [\Gamma' : \Gamma]/2 & \text{falls } -1 \in \Gamma' \text{ und } -1 \notin \Gamma \\ [\Gamma' : \Gamma] & \text{sonst} \end{cases}$$

24. Das Geschlecht von $X_0(p)$.

Betrachten Sie die Modulkurve $X_0(p)$ für eine Primzahl p und setzen Sie $k = p + 1$. Zeigen Sie mit Hilfe der Resultate aus den Aufgaben 20 bis 23, dass gilt:

$$g(X_0(p)) = \begin{cases} \lfloor \frac{k}{12} \rfloor - 1 & k \equiv 2 \pmod{12} \\ \lfloor \frac{k}{12} \rfloor & \text{sonst} \end{cases}$$

Abgabetermin: Freitag, 27.11.2009 um 10:00 Uhr.